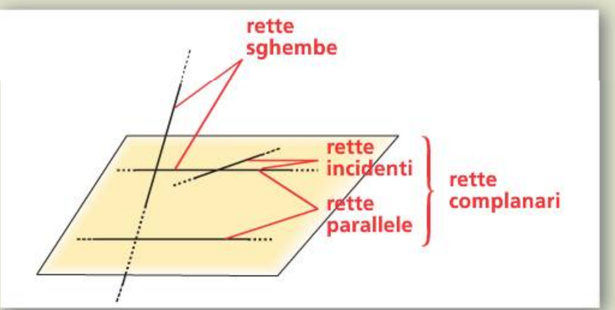
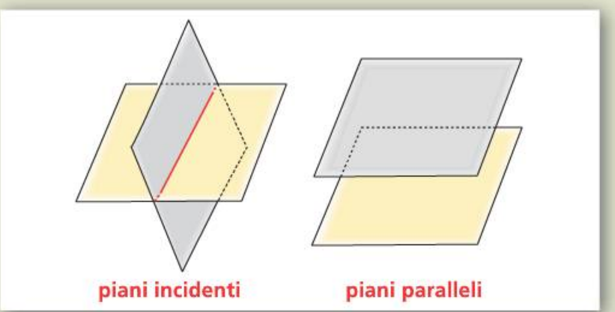
LA TEORIA IN SINTESI
LO SPAZIO

1. PUNTI, RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

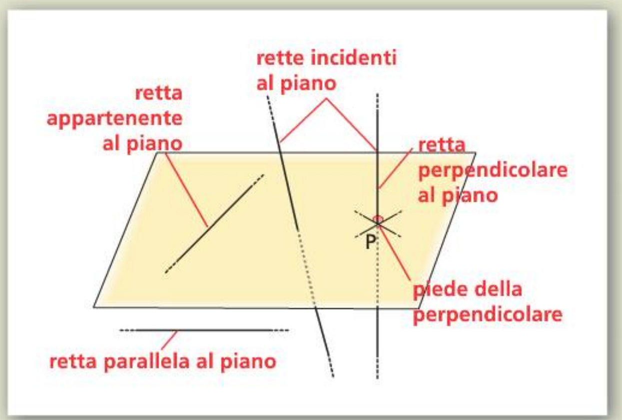
- Le **figure solide** (o **solidi**) sono figure i cui punti non appartengono tutti allo stesso piano.
- Alcuni **postulati dello spazio**.
  1. Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano.
  2. Fissati due punti in un piano, la retta passante per i due punti giace interamente sul piano.
  3. Un qualunque piano divide l'insieme dei punti dello spazio che non gli appartengono in due regioni tali che:
     - due punti qualsiasi della stessa regione sono estremi di un segmento che non interseca il piano;
     - due punti qualsiasi di regioni diverse sono estremi di un segmento che interseca il piano.
- Due rette nello spazio sono **complanari** (incidenti o parallele) se appartengono allo stesso piano, altrimenti sono **sghembe**.



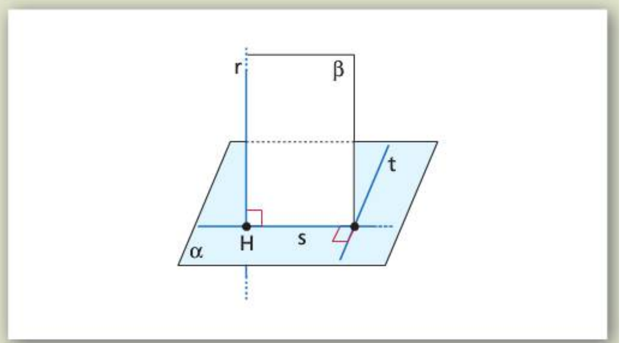
- Due piani nello spazio sono:
  - **incidenti** se hanno in comune solo una retta;
  - **paralleli** in caso contrario: due piani paralleli non hanno alcun punto in comune oppure sono coincidenti.



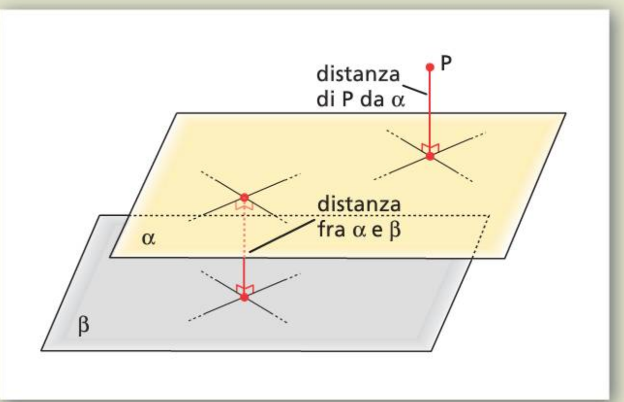
- Una retta nello spazio può essere:
  - **appartenente** a un piano se tutti i suoi punti appartengono al piano;
  - **incidente** al piano se ha un solo punto in comune con il piano;
  - **parallela** al piano se non ha alcun punto in comune con il piano.



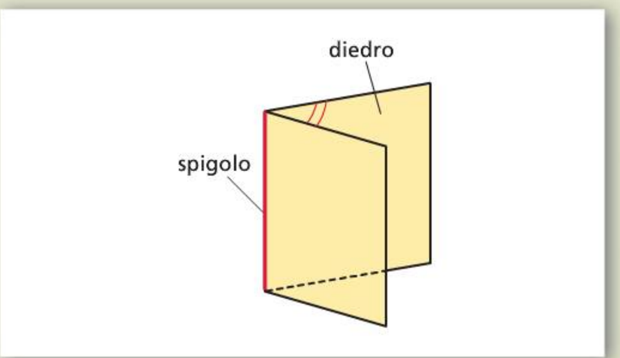
- Una retta incidente a un piano in un punto P è **perpendicolare al piano** quando è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per P. In tal caso P è detto **piede della perpendicolare**.
- **Teorema delle tre perpendicolari**
  Se dal piede H di una perpendicolare r a un piano α si manda la perpendicolare s a una qualunque retta t del piano, quest'ultima risulta perpendicolare al piano β delle prime due.



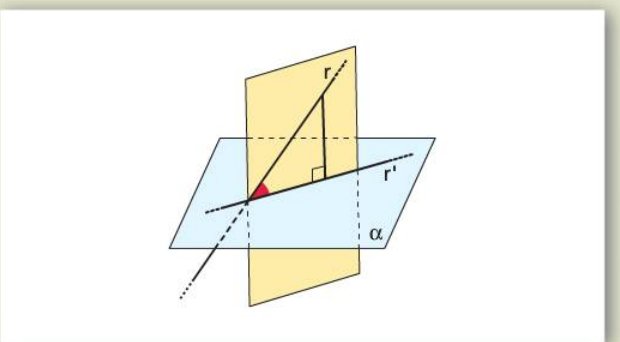
- La **distanza fra due piani paralleli** è la lunghezza del segmento intercettato dai due piani su una qualunque retta perpendicolare ai due piani.
- La **distanza di un punto da un piano** è la lunghezza del segmento che ha per estremi il punto stesso e il piede della perpendicolare al piano.



- Dati due semipiani dello spazio aventi la stessa origine, un **diedro** è ognuna delle due parti, compresi i semipiani, in cui essi dividono lo spazio.

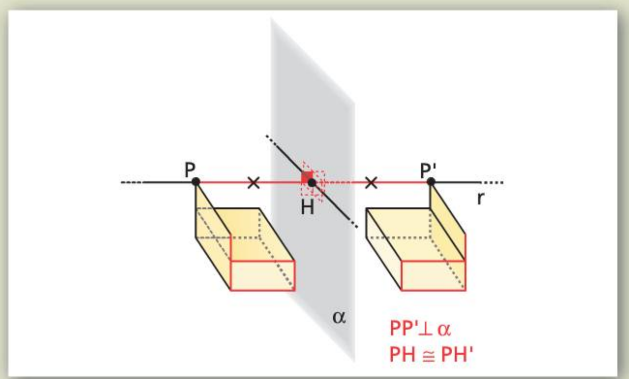


- L'angolo di una retta r con un piano α è l'angolo formato da r e dalla sua proiezione r' su α.



2. LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

- Sono analoghe alle omonime trasformazioni nel piano. Fra le isometrie nello spazio si definisce anche la **simmetria rispetto a un piano**.

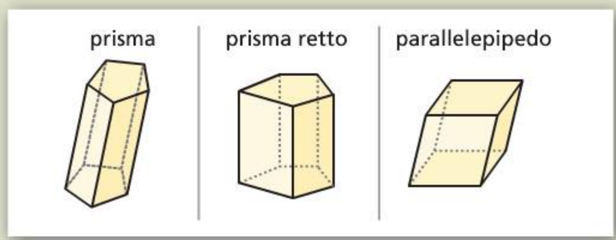


3. I POLIEDRI

- Un **poliedro** è una figura solida limitata da un numero finito di poligoni appartenenti a piani diversi e tali che il piano di ogni faccia non attraversi il solido.
- Un **prisma** è un poliedro delimitato da due **basi** che sono poligoni congruenti posti su piani paralleli e da **facce laterali** che sono parallelogrammi. La distanza fra i piani delle basi è l'**altezza** del prisma; le **diagonali** sono segmenti che congiungono due vertici non appartenenti alla stessa faccia.

  Un prisma è **retto** se gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi, è **regolare** quando è retto e le sue basi sono poligoni regolari.

  Un prisma è un **parallelepipedo** se anche le basi sono parallelogrammi.



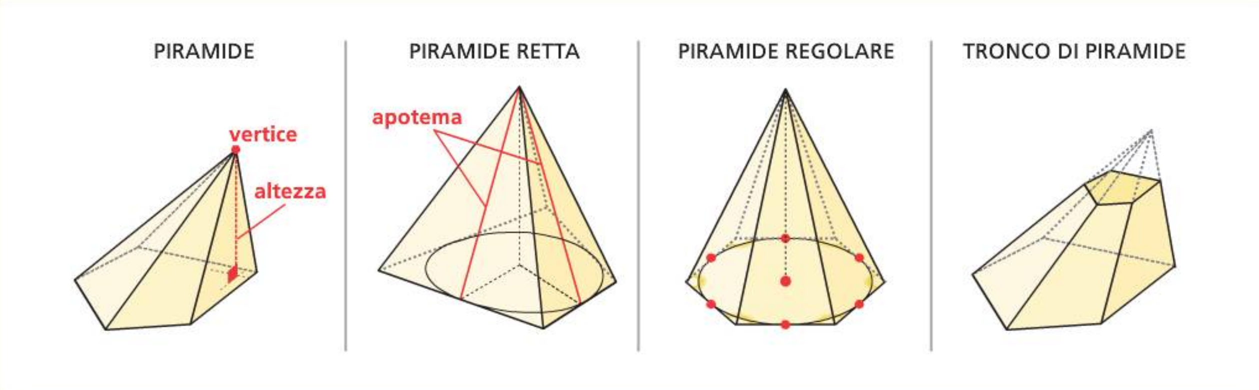
- Una **piramide** è un poliedro delimitato da un poligono, detto **base**, e da **facce laterali** triangolari le quali:
  - hanno in comune un vertice, detto **vertice della piramide**;
  - hanno il lato opposto a tale vertice coincidente con un lato del poligono di base.

La distanza fra il vertice e il piano della base è detta **altezza** della piramide.

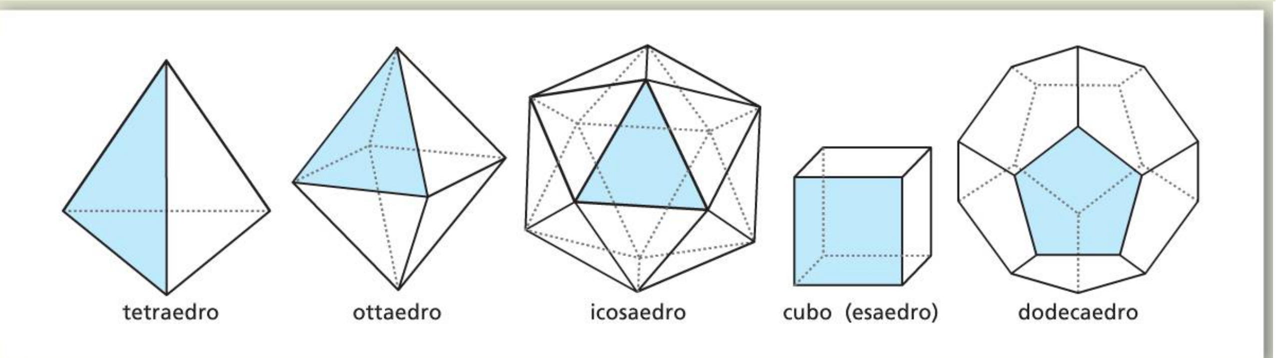
Una piramide è **retta** quando nella sua base si può inscrivere una circonferenza il cui centro è la proiezione ortogonale del vertice della piramide sul piano di base. L'altezza delle facce laterali di una piramide retta è detta **apotema**.

Una piramide è **regolare** quando è retta e la sua base è un poligono regolare.

- Un **tronco di piramide** è limitato da due poligoni simili fra loro e posti su piani paralleli (le **basi** del tronco) e da **facce laterali** che sono trapezi.

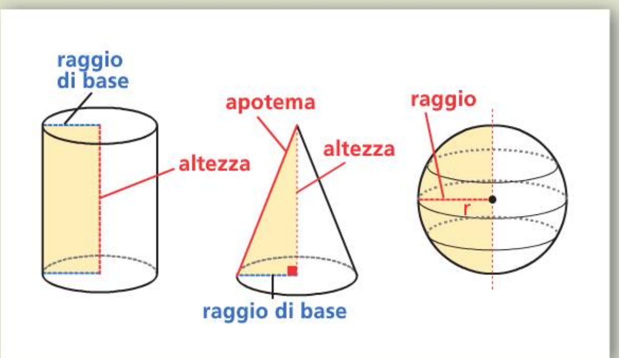


- Un poliedro è **regolare** quando le sue facce sono poligoni regolari congruenti e anche i suoi diedri e i suoi angoloidi sono congruenti.
  Ci sono solo cinque tipi di poliedri regolari.



4. I SOLIDI DI ROTAZIONE

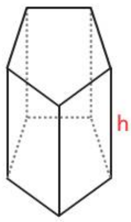
- I solidi di rotazione sono generati dalla rotazione di una figura piana attorno a una retta. In particolare:
  - un **cilindro** è generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno a uno dei suoi lati;
  - un **cono** è generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno a uno dei suoi cateti;
  - una **sfera** è generata dalla rotazione completa di un semicerchio attorno al suo diametro.



5. 7. LE AREE E I VOLUMI DEI SOLIDI NOTEVOLI

- Formule per il calcolo della **misura delle aree delle superfici e dei volumi** dei principali solidi.

PRISMA RETTO

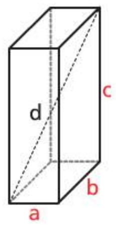


$A_\ell = 2p \cdot h$

$A_t = A_\ell + 2A_b$

$V = A_b \cdot h$

PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO



$A_b = ab$

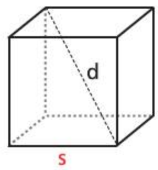
$A_\ell = 2(ac + bc)$

$A_t = 2(ac + ab + bc)$

$V = a \cdot b \cdot c$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

CUBO



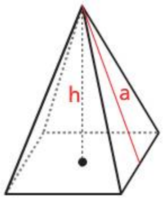
$A_b = s^2$

$A_t = 6s^2$

$V = s^3$

$d = s\sqrt{3}$

PIRAMIDE RETTA

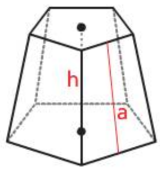


$A_\ell = p \cdot a$

$A_t = A_\ell + A_b$

$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$

TRONCO DI PIRAMIDE RETTA

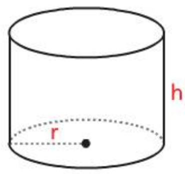


$A_\ell = (p + p') \cdot a$

$A_t = A_\ell + A_b + A'_b$

$V = \frac{1}{3} h \left(A_b + A'_b + \sqrt{A_b \cdot A'_b}\right)$

CILINDRO



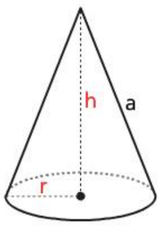
$A_b = \pi r^2$

$A_\ell = 2\pi r \cdot h$

$A_t = 2\pi r (h + r)$

$V = \pi r^2 \cdot h$

CONO



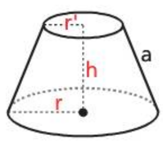
$A_b = \pi r^2$

$A_\ell = \pi r a$

$A_t = \pi r (a + r)$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

TRONCO DI CONO



$A_b = \pi r^2$

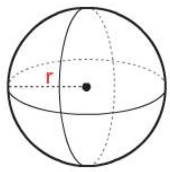
$A'_b = \pi r'^2$

$A_\ell = \pi a (r + r')$

$A_t = A_\ell + A_b + A'_b$

$V = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + r'^2 + r \cdot r')$

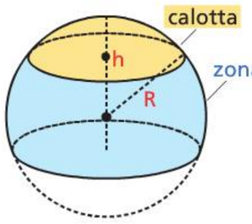
SFERA



$A = 4\pi r^2$

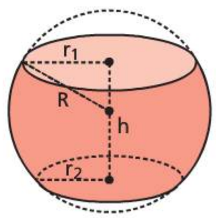
$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

CALOTTA E ZONA SFERICA



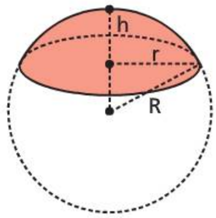
$S = 2\pi Rh$

SEGMENTO SFERICO A DUE BASI



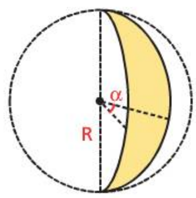
$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \pi r_1^2\frac{h}{2} + \pi r_2^2\frac{h}{2}$

SEGMENTO SFERICO A UNA BASE



$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \pi r^2\frac{h}{2} = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$

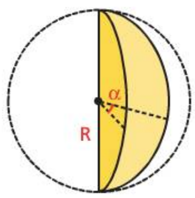
FUSO SFERICO



$S_f = 2R^2\,\alpha_{rad} = \frac{\alpha^\circ}{90^\circ}\pi R^2$

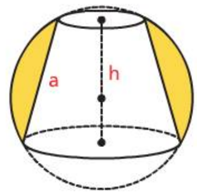
α_{rad}: ampiezza del diedro in radianti
α°: ampiezza del diedro in gradi

SPICCHIO SFERICO



$V = \frac{2}{3}\,\alpha_{rad}\,R^3 = \frac{\alpha^\circ}{270^\circ}\pi R^3$

ANELLO SFERICO



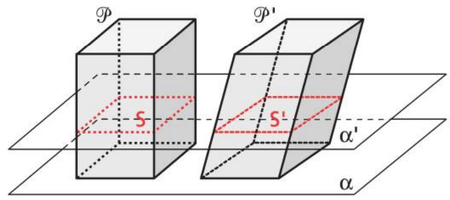
$V = \frac{1}{6}\pi a^2 h$

6. L'ESTENSIONE E L'EQUIVALENZA DEI SOLIDI

- Due solidi aventi la stessa estensione sono **equivalenti**.

- Alcuni **postulati dell'equivalenza dei solidi**.
  1. Due solidi congruenti sono sempre equivalenti.
  2. Solidi ottenuti come somma o differenza di solidi congruenti o equivalenti sono equivalenti.
  3. Un solido non può essere equivalente a una sua parte (**postulato di De Zolt**).
  4. Dati due solidi *A* e *B*: o *A* è equivalente a *B* o *A* è prevalente a *B* ($A > B$) o *A* è suvvalente a *B* ($A < B$) e ciascun caso esclude gli altri due (**legge di esclusione**).
  5. Due solidi che possono essere disposti in modo che ogni piano parallelo a un altro fissato, scelto come riferimento, li tagli secondo sezioni equivalenti, sono equivalenti (**principio di Cavalieri**).

$\forall\, \alpha' /\!/ \alpha,\ S \doteq S' \Rightarrow \mathcal{P} \doteq \mathcal{P}'$



Principio di Cavalieri

- Teorema: due solidi **equicomposti** sono equivalenti.